$\mathbb{Z}$, ισχύ αριθμήσιμου

$\mathbb{R}$, ισχύς συνεχούς (δεν έχει κενά) - συνδεδεμένη με την έννοια της πληρότητας

Δ.Ο. άπειρης διάστασης

Νέες έννοιες: - Η σύγκλιση ακολουθιών διαν. χώρου
- Η έννοια της πληρότητας των δ.χ.

Γενικές Έννοιες: - Ο δ.χ. Η είναι απείρων διαστάσεων όταν ο αριθμός των γραμ. ανεξάρτητων διαν. του δεν είναι πεπερασμένος. δηλ $N \to \infty$.

πχ.

Ένα παράδειγμα είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων F, σ' ένα διάστημα $I=[a,b]$.

Σ' αυτόν τον χώρο τα διαν. $|f\rangle$ & $|g\rangle$ είναι οι συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ & $g(x)$, $x \in [a,b]$

Το εσωτερικό γινόμενο $\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x) dx$, $w(x)$: πραγματική, θετική & συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ που καλείται συνάρτηση βάρους, ή συνάρτηση πυκνότ.

Στο χώρο F, ορίζονται τα ορθοκανονικά διαν. $|e_i\rangle$, $i=1,\ldots$ που αντιστ. στις ορθοκανονικές συναρτήσεις $e_1(x), e_2(x), \ldots e_k(x), \ldots$ που έχουν την ιδιότητα:

$$\langle e_k|e_m\rangle = \int_a^b e_k^*(x)\, e_m(x)\, w(x)\, dx = \delta_{km}$$

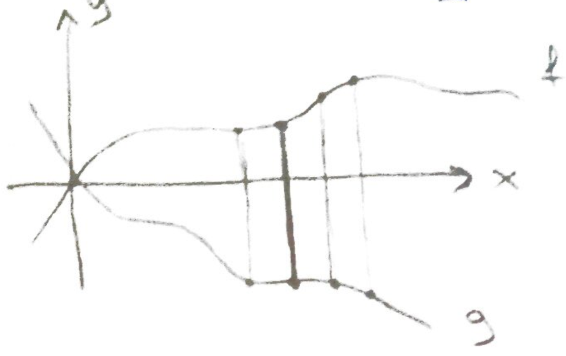
Η ανισότητα Cauchy-Schwartz, για τον δ.χ. F. είναι

$$|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle \Rightarrow \left|\int_a^b f^*(x) g(x) w(x) dx\right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

Η απόσταση, ρ, μεταξύ δύο διαν. $|f\rangle, |g\rangle$, ορίζεται ως:

$$\rho(|f\rangle,|g\rangle) = \sqrt{(\langle f| - \langle g|)(|f\rangle - |g\rangle)}$$

Αν F, ο δ.χ.: $$\rho^2(|f\rangle,|g\rangle) = \int_a^b \underbrace{w(x)\left(f(x)-g(x)\right)^2}_{\text{Ουσιαστικά Υπολογίζω τη μέση τιμή της απόστασης}} dx$$



Ορισμός: Θα λέμε ότι μια ακολουθία διανυσμάτων $|f_n\rangle$ συγκλίνει σ'ένα διαν $|f\rangle$, αν κ' μόνο αν: $\lim_{n\to\infty} \rho(|f_n\rangle, |f\rangle) = 0$.

Η σύγκλιση αυτή λέγεται μέση σύγκλιση ή ισχυρή σύγκλιση ή μέση τιμή.

* Αποδεικνύεται ότι το όριο $|f_n\rangle \to |f\rangle$, $n\to\infty$, εφόσον υπάρχει είναι μονοσήμαντα ορισμένο.

Απόδ.

Έστω ότι $\exists$ κ' ένα άλλο διαν. το $|f'\rangle$ τ.ω. $|f_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} |f'\rangle$.
Τότε από τριγωνική ιδιότητα (ανισότητα):

$$\rho(|f\rangle,|f'\rangle) \le \rho(|f_n\rangle,|f\rangle) + \rho(|f_n\rangle,|f'\rangle)$$

Επίσης, $\lim_{n\to\infty}(|f_n\rangle,|f\rangle) = 0$ και $\lim_{n\to\infty}(|f_n\rangle,|f'\rangle) = 0$.

Άρα $\lim_{n\to\infty}(|f\rangle,|f'\rangle) = 0 \Rightarrow |f\rangle \equiv |f'\rangle$. Άρα το όριο είναι μοναδ.

π.χ.

Δ.χ. F, (συνεχείς συναρτήσεις). Τότε $|f_n\rangle \equiv f_n(x)$ κ' $|f\rangle \equiv f(x)$
σύγκλιση στη μέση τιμή: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0$.

Ορισμός: (Βασική Ακολουθία).
Μια ακολουθία διανυσμάτων $|f_n\rangle \in H$, $n=1,2,\dots$ λέγεται βασική, αν η απόσταση μεταξύ των $|f_n\rangle$ κ' $|f_m\rangle$ γίνεται μηδέν όταν τα $m,n\to\infty$, δηλ.: $\rho(|f_n\rangle,|f_m\rangle) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

Μ.Φ. 25/10/2016

2

Ορισμός: Ένας χώρος, Η, λέγεται **πλήρης**, αν κάθε βασική ακολουθία διανυσμάτων του, συγκλίνει σε όριο που ανήκει στον Η.

Βασικές Σχέσεις:

Ανισότητα Bessel

Ο δ.χ. Η είναι εφοδιασμένος με ένα σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2\ldots}$ τ.ω. $\langle e_i|e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i,j=1,2\ldots$

Τότε η ανισότητα Bessel: $\sum_{i=1}^{\infty} \langle a|e_i\rangle\langle e_i|a\rangle \leq \langle a|a\rangle$

ή $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \langle a|a\rangle$ (1)

Παρατήρηση: Η παραπάνω ανισότητα (1) ισχύει για κάθε ορθοκανονικό σύστημα και είναι γνωστή ως ανισ. Bessel.

Σχέση Parseval

$\sum_{i=1}^{\infty} \langle a|e_i\rangle\langle e_i|a\rangle = \langle a|a\rangle$ ή $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 = \langle a|a\rangle$ (2)

(εξίσωση Parseval)

** Παρατήρηση: Είναι ειδική περίπτωση της ανισ. Bessel, ισχύει όταν το ορθοκανονικό σύστημα είναι πλήρες (δηλ. είναι βάση).

Η σχέση (2) αποτελεί γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

Πληρότητα Ορθοκανονικού Συστήματος

Ορισμός: Ένας χώρος, Η, (Hilbert) είναι ένας δ.χ. εφοδιασμένος (απείρης διάστασης) με ένα εσωτερικό γινόμενο τ.ω. η νόρμα του $\|a\|^2 = \langle a|a\rangle$ μετατρέπει τον χώρο σε πλήρη μετρικό χώρο.

Ορισμός: Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2\ldots}$ σ' ένα χώρο Η, αποτελεί βάση του χώρου αν:

$\langle a|e_i\rangle = 0,\ \forall i=1,2,\ldots, \Rightarrow |a\rangle = |0\rangle$

Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται πλήρες!

* Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με αυτόν της βάσης.

Θεώρημα: Ένα ορθοκανονικό σύστημα διαν. $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2\ldots}$ θέτω χώρο, H, αποτελεί βάση αυτού του χώρου, αν και μόνο αν ισχύει η σχέση Parseval $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\langle a|e_i\rangle\langle e_i|a\rangle = \langle a|a\rangle\right)$, $\forall |a\rangle \in H$

"$\Rightarrow$" Απόδ.

Έστω μια ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\ldots}$ στον χώρο H.
Τότε $\langle b|e_i\rangle = 0$, $i=1,2\ldots \Rightarrow |b\rangle = |0\rangle$.
Έστω τώρα τυχαίο διάνυσμα του χώρου, $|a\rangle \in H$.
Τότε κατασκευάζω το διαν: $|b\rangle = |a\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} a_i|e_i\rangle$, $a_i = \langle e_i \ldots$
Τότε: $\langle b|e_j\rangle = \left(\langle a| - \sum_{i=1}^{\infty} a_i\langle e_i|\right)|e_j\rangle$

$$= \langle a|e_j\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^*\langle e_i|e_j\rangle = a_j^* - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^*\delta_{ij}$$

για $i \neq j$
για $i = j$ =

$$= a_j^* - a_j^* = 0$$

Συνεπώς $|b\rangle = 0$, άρα $|a\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i|e_i\rangle$ και κατά συνέπεια ισχύει η σχέση του Parseval.

"$\Leftarrow$"

Έστω ότι ισχύει η σχέση Parseval.

$\langle a|a\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}|\langle e_i|a\rangle|^2$, $\forall |a\rangle \in H$.

Έστω ότι $\exists$ $b \in H$ τ.ω. $\langle e_i|b\rangle = 0$, $\forall |e_i\rangle$, $i=1,2\ldots$

Τότε εφαρμόζω τη σχέση Parseval για το $|b\rangle$ και έχω ότι:

$\langle b|b\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}|\langle e_i|b\rangle|^2 = 0$, άρα $|b\rangle = |0\rangle$.

Δηλ. το σύστημα των $|e_i\rangle_{i=1,2\ldots}$ αποτελεί βάση του H ■

$\to$ στο διάστημα [a,b]

Στον δχ F, γράφαμε: • $\langle f|f\rangle = \int_a^b w(x)\,|f(x)|^2 dx$.

$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} f_i|e_i\rangle$, ανισότητα $f(x) \simeq \sum_{i=1}^{\infty} f_i\, e_i(x)$, όπου $f_i = \langle e_i|f\rangle = \int_a^b w(x)\, e_i^*(x)\cdot f(x)dx$

• Ανισότητα Bessel: $\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2 \leq \int_a^b w(x)\,|f(x)|^2 dx = \langle f|f\rangle$.

Πληρότητα του συνόλου $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2\ldots}$

(Μετά $\to$) Πληρότητα του δ.χ.